**Segundo Parcial Matemáticas 2** Miguel Guzmán (1-2)

## Primer Pregunta.

$$1.-\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$$

Haciendo la sustitución $u^2 = x-2 \quad => \quad 2udu = dx$

$$I=\int \frac{(u^2+2+1)2u}{(u^2+2)u}du \quad => \quad I = 2\int \frac{u^2+3}{u^2+2}du$$

Diviendo polinomios queda

$$I = 2\int 1+\frac{1}{u^2+2}du \quad => \quad I = 2u+\int \frac{1}{\frac{u^2}{2}+1}du + C_1$$

Integrando con un cambio de variable $a=\frac{u}{\sqrt{2}} \quad => \quad da = \frac{du}{\sqrt{2}}$

$$I = 2u+\sqrt{2}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)+C$$

Regresando cambio de variable

$$I = 2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x-2}\right)+C$$

$$2.-\int x^3e^{x^2}dx$$

Haciendo integral por parte, donde el cambio viene por

$$u=x^2 \quad dv = xe^{x^2}dx \quad => \quad du = 2xdx \quad v=\frac{e^{x^2}}{2}$$

Por lo que

$$I=\frac{x^2e^{x^2}}{2}-\int xe^{x^2}dx \quad => \quad I = e^{x^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)+C$$

$$3.-\int \frac{1}{3x^2+6x+5}dx$$

Completando cuadrados se tiene, pero ante todo sacando factor 3

$$I=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2x+\frac{5}{3}}dx \quad => \quad I=\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2+\frac{5}{3}-1}dx \quad => \quad I=\frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2+\frac{2}{3}}dx$$

Haciendo el cambio de variable, $u=x+1 \quad => \quad du = dx$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{u^2 + \frac{2}{3}} du \quad => \quad I = \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}u\right)^2 + 1} du$$

Haciendo el cambio $a = \sqrt{\frac{3}{2}}u \quad => \quad da = \sqrt{\frac{3}{2}}du$

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\int \frac{1}{a^2 + 1} da \quad => \quad I = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan(a) + C$$

Para finalizar

$$I = \frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{2}}(x + 1)\right) + C$$

## Segunda Pregunta.

1.- Para demostrar, se tiene

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad => \quad 2ye^x = e^{2x} - 1$$

Haciendo un cambio, $a = e^x$

$$2ya = a^2 - 1 \quad => \quad a^2 - 2ya - 1 = 0$$

Aplicando la resolvente

$$a = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2} \quad => \quad a = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

Recordando el cambio

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad => \quad x = \ln\left(y \pm \sqrt{y^2 + 1}\right)$$

Por lo que se demuestra

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

Debido al dominio del logaritmo, la raíz negativa no es solución.

2.- Sabemos que

$$\sinh(2t) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

Por propiedades de hiperbólicas

$$\tanh(2t) = \frac{\sinh(2t)}{\cosh(2t)} = \frac{2\sinh(t)\cosh(t)}{\cosh^2(t) + \sinh^2(t)} = \frac{2\sinh(t)\sqrt{\sinh^2(t) + 1}}{1 + \sinh^2(t) + \sinh^2(t)}$$

Sustituyendo el valor

$$\tanh(2t) = \frac{2\frac{1}{2\sqrt{6}}\sqrt{\frac{1}{24}+1}}{1+2\left(\frac{1}{24}\right)} \quad => \quad \tanh(2t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{5}{2\sqrt{6}}}{\frac{13}{12}} \quad => \quad \tanh(2t) = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}}$$

Por lo que

$$\tanh(2t) = \frac{5}{13}$$

**Tercera Pregunta**

Se tiene

$$\log_3(27^{x-1}) + \log_3(7^{x-2}) + 3 = 3x$$

Aplicando propiedades de logaritmo

$$(x-1)\log_3 3^3 + (x-2)\log_3(7) + 3 = 3x$$

$$3(x-1) + (x-2)\log_3(7) = 3(x-1)$$

$$(x-2)\log_3 7 = 0 \quad => \quad \boldsymbol{x = 2 \;\; RESP}$$

**Cuarta Pregunta.**

Dada la función

$$y = \sin(x)^{\cos(x)} + \cos(x)^{\sin(x)}$$

Derivando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin(x)^{\cos(x)} + \frac{d}{dx}\cos(x)^{\sin(x)}$$

Buscamos entonces las derivadas

$$\frac{d}{dx}\sin(x)^{\cos(x)} \; : \quad \ln(y_1) = \cos(x)\ln(\sin(x)) \quad => \quad \frac{y_1{}'}{y_1} = -\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\sin(x)^{\cos(x)} = \sin(x)^{\cos(x)}\left(-\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right)$$

Así mismo determinamos la otra derivada

$$\frac{d}{dx}\cos(x)^{\sin(x)} = \cos(x)^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(\cos(x)) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)$$

Concluimos

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x)^{cos(x)}\left(-\sin(x)\ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}\right) + \cos(x)^{\sin(x)}\left(\cos(x)\ln(\cos(x)) - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}\right)$$